

# מכינה במתמטיקה למדעי המחשב

פרק 9 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## הבינום של ניוטון:

### סיכום כללי:

#### מושג העצרת:

מסמנים:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  כאשר  $n$  מספר טבעי.  
מגדירים:  $0! = 1$ .

#### המקדם הבינומי:

הביטוי  $\binom{n}{k}$  נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  לכל  $n, k$  טבעיים  
כאשר  $0 \leq k \leq n$ .

#### הבינום של ניוטון:

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$   
לכל  $n$  טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה- $k$  ע"י:  $T_k = \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k-1}$ .

#### משולש פסקל:

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת  
שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו  
באופן המתואר:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & \ddots & & & & \vdots & & & & \ddots & & & & 
 \end{array}$$

## שאלות:

(1) חשב, ללא מחשבון:

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $(n-2)!(n^2-n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2-2}{(n+1)!}$

(3) חשב:

$$\begin{array}{cccc} \text{א.} & \binom{5}{3} & \text{ב.} & \binom{4}{1} \\ \text{ג.} & \binom{10}{0} & \text{ד.} & \binom{14}{11} \end{array}$$

(4) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$

ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(5) הוכח באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי מתקיים:  $\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$ 

(6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $(a+b)^4$       ב.  $(x+2)^5$       ג.  $(x-4)^3$

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  לכל  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ .

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

(8) הוכח שלכל  $n \geq 1$  טבעי מתקיים :

א.  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ .

ב.  $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ .

ג.  $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$ .

(9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום  $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$ .

(10) בפיתוח של  $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a}\right)^{12}$ , ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא  $a^7$ . מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

(11) מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$ , איבר שאינו מכיל את  $x$ , וחשב את ערכו.

(12) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ , את המקדם של  $\frac{1}{x}$ .

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם  $a = b = 1$ .

(13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום  $(a+b)^n$ , הוא 15. מצא את  $n$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{1}{30}$  ב.  $\frac{1001}{285}$
- (2) הוכחה.
- (3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) א.  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- ב.  $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
- ג.  $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9)  $T_4 = \frac{15}{2a}$
- (10)  $T_7 = 924a^7$
- (11)  $T_9 = 45$
- (12) א.  $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$  ב.  $2^{18}$
- (13)  $n = 6$